

## Задания на олимпиаду по высшей математике

### Задание 1

200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий; с другой стороны, из тех же 200 учеников в каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем среди отобранных 10 выбран самый низкий. Кто из двоих окажется выше (если это разные лица) – самый низкий из самых высоких учеников, или самый высокий из самых низких?

### Задание 2

Три брата получили 24 яблока, причем каждому досталось столько яблок, сколько ему было лет три года тому назад. Самый младший, мальчик очень смысленный, предложил братьям такой обмен яблоками:

– Я, – сказал он, – оставлю себе только половину имеющихся у меня яблок, а остальные разделю между вами поровну; после этого пусть наш средний брат тоже оставит себе половину, а остальные яблоки даст мне и старшему брату поровну, а затем и старший брат пусть оставит себе половину всех имеющихся у него яблок, а остальные разделит между мной и средним братом поровну. Братья, не подозревая коварства в таком предложении, согласились удовлетворить желание младшего. В результате ... у всех оказалось яблок поровну.

Сколько же лет было малышу и каждому из остальных братьев?

### Задание 3

Вычислить предел последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$ .

### Задание 4

Нам обоим вместе 63 года. Сейчас мне вдвое больше лет, чем вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Сколько лет мне и сколько лет вам?

### Задание 5

Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?

### Задание 6

Представить число 20 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

### Задание 7

Поперечное сечение канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне ( $\varphi$ ) боков периметр сечения воды будет наименьшим, если площадь сечения воды в канале равна  $S$ , а уровень воды равен  $h$ .

### Задание 8

Найти решение системы уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$$

### Задание 9

Вычислить неопределенный интеграл  $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$ .

### Задание 10

Найти сумму корней уравнения

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & \ln 4x & 5 & 4 \\ 0 & -2 & \sqrt{x+6} & 1 & e^x \\ 0 & 0 & x & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3-x \\ 0 & 0 & x & \sin^3 x \\ 0 & 2x+1 & 5 & \sqrt[3]{2x^2-8x} \\ -1 & 1 & x^{-2} & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ 4-x & 0 & 2 \\ -3 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

### Задание 11

Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4», и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем «5», и меньше, чем «4». Число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Сколько каких оценок получили студенты группы?

### Задание 12

Найти сумму квадратов целых решений неравенства  $f'(x) + g'(x) \leq 0$ , где  $f(x) = 2x^3 + 12x^2$ ,  $g(x) = 9x^2 + 72x$ .